

# Mecánica Clásica II

## **Tema 2: Movemento nun campo de forzas centrais**

José M. Sánchez de Santos  
Departamento de Física de Partículas  
Facultade de Física  
USC

Notas de clase da materia Mecánica Clásica II do Grao en Física da USC

## Índice

<b>1. Problema dos dous corpos</b>	<b>3</b>
1.1. Lagrangiana e masa reducida . . . . .	3
1.2. Teoremas de conservación e integrais do movemento . . . . .	4
1.3. Conservación da enerxía e potencial efectivo . . . . .	6
1.4. Clasificación de órbitas . . . . .	7
1.5. Integración do movemento polo método da enerxía . . . . .	8
1.6. Ecuación do movemento . . . . .	9
<b>2. Forza inversamente proporcional ao cadrado da distancia.</b>	
<b>Movemento planetario</b>	<b>10</b>
2.1. Problema de Kepler . . . . .	10
2.2. Solución polo método da enerxía . . . . .	11
2.3. Integración da ecuación do movemento . . . . .	12
2.4. Ecuacións cartesianas das órbitas . . . . .	13
2.5. Leis de Kepler . . . . .	15
2.6. Lei da Gravitación Universal a partir das leis de Kepler . . . . .	16
2.7. Estabilidade das órbitas circulares . . . . .	17
2.8. Algunhas aplicacións . . . . .	18
2.8.1. Satélites en órbita . . . . .	18
2.8.2. Velocidade de escape . . . . .	19
2.8.3. Satélites xeoestacionarios . . . . .	20
2.8.4. Misións a outros planetas . . . . .	20
<b>3. Colisións. Seccións eficaces</b>	<b>21</b>
3.1. Parámetro de impacto e ángulo de dispersión . . . . .	21
3.2. Sección eficaz de colisión . . . . .	22
3.3. Sección eficaz diferencial . . . . .	23
3.3.1. Exemplo: scattering de partículas puntuais contra es-	
feras ríxidas . . . . .	25
3.4. Dispersión de Rutherford . . . . .	25

## 1. Problema dos dous corpos

Neste tema imos estudar o movemento dun sistema formado por dous corpos que interactúan mediante unha forza conservativa dirixida ao longo da recta que une os centros de ambos (forza central) sen ningunha outra forza exterior (o cal é sempre unha aproximación). Exemplos poden ser un sistema binario de estrelas, o movemento dos planetas en torno ao sol ou outra estrela, satélites, o movemento do electrón e o protón no átomo de hidróxeno ou os movementos dos átomos nunha molécula diatómica. Nestes dous últimos casos xa sabemos que a mecánica clásica non é válida, pero aprenderemos conceptos que serán útiles cando vexamos estes sistemas no contexto correcto da mecánica cuántica.

### 1.1. Lagrangiana e masa reducida

Un sistema composto de dúas partículas en dúas dimensións posúe 6 graos de liberdade, e por tanto virá descrito por 6 coordenadas xeneralizadas, que poderían ser, por exemplo, os vectores de posición de cada partícula,  $\mathbf{r}_1$ ,  $\mathbf{r}_2$ . Como temos a opción de elixir as coordenadas do xeito que mellor nos conveña, imos considerar outra posibilidade, que consiste en tomar as 3 coordenadas do vector de posición do centro de masas  $\mathbf{R}$  ademais das outras 3 correspondentes ao vector de posición relativo entre as partículas,  $\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ ,

$$\mathbf{R} = \frac{m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2}{m_1 + m_2}$$

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1.$$

Podemos invertir estas relacións para obter os vectores  $\mathbf{r}_1$ ,  $\mathbf{r}_2$  en función de  $\mathbf{R}$  e  $\mathbf{r}$ :

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{R} - \frac{m_2}{M}\mathbf{r}$$

$$\mathbf{r}_2 = \mathbf{R} + \frac{m_1}{M}\mathbf{r},$$

onde  $M = m_1 + m_2$ . Estas ecuacións (e as súas inversas) son as ecuacións de transformación que relacionan as coordenadas cartesianas ( $\mathbf{r}_1$ ,  $\mathbf{r}_2$ ) coas coordenadas xeneralizadas ( $\mathbf{R}$ ,  $\mathbf{r}$ ). O primeiro que debemos facer para resolver este problema polo método lagrangiano é escribir a enerxía cinética en función das coordenadas xeneralizadas:

$$T = \frac{1}{2}m_1\dot{\mathbf{r}}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{\mathbf{r}}_2^2 = \frac{1}{2}m_1 \left[ \dot{\mathbf{R}} - \frac{m_2}{M}\dot{\mathbf{r}} \right]^2 + \frac{1}{2}m_2 \left[ \dot{\mathbf{R}} + \frac{m_1}{M}\dot{\mathbf{r}} \right]^2.$$

Expandindo os cadrados e simplificando obtemos a seguinte expresión para a enerxía cinética:

$$T = \frac{1}{2}M\dot{\mathbf{R}}^2 + \frac{1}{2}\mu\dot{\mathbf{r}}^2,$$

onde  $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$  é unha constante con dimensións de masa chamada *masa reducida*. Cando os dous corpos teñen masas moi diferentes (aproximación xeralmente válida no caso de que estemos considerando sistemas sol-planeta ou planeta-satélite), poñamos  $m_2 \ll m_1$ , entón a masa reducida é aproximadamente a masa do corpo máis pequeno  $\mu \approx m_2$  (no exemplo da Terra e a Lúa,  $M_T \approx 80M_L \Rightarrow \mu = \frac{80}{81}M_L \approx 0,988M_L$ ).

Ademáis, se a forza é central, o potencial non depende máis que da distancia entre as partículas  $r = \|\mathbf{r}\| = \|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1\|$  e, entón,  $U(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = U(r)$  e a función lagrangiana escríbese:

$$L = T - U = \frac{1}{2}M\dot{\mathbf{R}}^2 + \frac{1}{2}\mu\dot{\mathbf{r}}^2 - U(r)$$

## 1.2. Teoremas de conservación e integrais do movemento

Seguindo coa nosa análise lagrangiana do problema, o seguinte aspecto que queremos analizar é a existencia de simetrías e leis de conservación. A elección de coordenadas xeneralizadas que vimos de facer é especialmente axeitada porque as tres coordenadas asociadas ao vector de posición do centro de masas  $\mathbf{R}$  son cíclicas, xa que non aparecen na lagrangiana (só as súas derivadas):

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{R}} = \mathbf{0}$$

e por tanto os correspondentes momentos canónicos conxugados  $\mathbf{P}$  son constantes:

$$\mathbf{P} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{R}}} = M\dot{\mathbf{R}} = \text{cte.}$$

Este resultado non di outra cousa que a ausencia de forzas externas fai que o sistema do centro de masas sexa un sistema inercial, e sen perder xeneralidade, podemos tomar dito sistema como sistema de referencia, ou equivalentemente fixar  $\mathbf{R} = \mathbf{0}$ . Desta maneira, a lagrangiana é simplemente:

$$L = T - U = \frac{1}{2}\mu\dot{\mathbf{r}}^2 - U(r).$$

Esta lagrangiana é equivalente á dunha partícula de masa  $\mu$  que se move no espazo de tres dimensións con vector de posición  $\mathbf{r}$  sometida a un potencial  $U(r)$ . No caso particular en que un dos corpos teña moita máis masa que o outro, poñamos por exemplo de novo  $m_2 \ll m_1$ , pódese considerar que o corpo de maior masa permanece en repouso na orixe de coordenadas mentres que o corpo de masa pequena  $m_2 \approx \mu$  é o que se move no potencial  $U$ , xa que neste caso, e no sistema CM:  $\mathbf{r}_1 = -\frac{m_2}{M}\mathbf{r} \approx \mathbf{0}$  e  $\mathbf{r}_2 = \frac{m_1}{M}\mathbf{r} \approx \mathbf{r}$ .

Pero isto non é todo, xa que o sistema ten máis simetrías. Da expresión da lagrangiana, e dado que o potencial é central (depende só da distancia e non dos ángulos), vemos que o problema ten simetría esférica, é dicir, é invariante baixo rotacións, e por tanto o momento angular total é unha

constante do movemente  $\mathbf{L} = \text{cte}$ . Calculemos o momento angular, que para o sistema de dúas partículas é  $\mathbf{L} = \mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_2 = \mathbf{r}_1 \times m_1 \dot{\mathbf{r}}_1 + \mathbf{r}_2 \times m_2 \dot{\mathbf{r}}_2$ . Como no sistema CM  $\mathbf{r}_1 = -\frac{m_2}{M} \mathbf{r}$  e  $\mathbf{r}_2 = \frac{m_1}{M} \mathbf{r}$ , substituindo na expresión de  $\mathbf{L}$  obtemos:

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mu \dot{\mathbf{r}},$$

que é o momento angular respecto á orixe dunha partícula de masa  $\mu$ , de acordo coa interpretación que fixemos anteriormente. Do produto vectorial anterior, deducimos que a posición  $\mathbf{r}$  e velocidade  $\dot{\mathbf{r}}$  da partícula están sempre no plano perpendicular a  $\mathbf{L}$ , que é sempre o mesmo plano, xa que  $\mathbf{L}$  é un vector constante. A conclusión á que chegamos utilizando este argumento de simetría é, polo tanto, que *o movemento dun sistema de dúas partículas sometidas a unha interacción central mutua ten lugar nun plano*. O momento angular é constante e perpendicular a dito plano, que, sen perder xeneralidade, podemos fixar como o  $z = 0$ , e a partir de agora utilizaremos coordenadas polares para o movemento bidimensional resultante  $(r, \theta)$ . A expresión da nosa lagrangiana queda entón:

$$L = \frac{1}{2} \mu (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) - U(r). \quad (1)$$

Nesta expresión vemos que a coordenada  $\theta$  é cíclica, o cal non é máis que un remanente da simetría baixo rotacións. Efectivamente, temos fixada a dirección e sentido da correspondente constante do movemento, que é o momento angular, pero non o seu módulo. Vexamos que este é xustamente o momento canónico conxugado, que se conserva para esta coordenada cíclica:

$$\begin{aligned} \mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mu \dot{\mathbf{r}} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ r \cos \theta & r \sin \theta & 0 \\ \mu(\dot{r} \cos \theta - r \sin \theta \dot{\theta}) & \mu(\dot{r} \sin \theta + r \cos \theta \dot{\theta}) & 0 \end{vmatrix} \\ &= \mathbf{k} \left( \mu r \dot{r} \sin \theta \cos \theta + \mu r^2 \dot{\theta} \cos^2 \theta - (\mu r \dot{r} \sin \theta \cos \theta - \mu r^2 \dot{\theta} \sin^2 \theta) \right) \\ &= \mu r^2 \dot{\theta} \mathbf{k} = l \mathbf{k}. \end{aligned}$$

O módulo do momento angular é entón  $l = \mu r^2 \dot{\theta}$ , que coincide xustamente co momento canónico conxugado á coordenada  $\theta$ :

$$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \mu r^2 \dot{\theta} = l.$$

É importante salientar que, ao ser  $l = \text{cte}$ ,  $r > 0$  e  $\mu > 0$ ,  $\Rightarrow \dot{\theta} > 0 \Rightarrow a$  *partícula xira sempre na mesma dirección* (sexa a dereitas ou a esquerdas, esta convención equivale a elixir o sentido do vector  $\mathbf{L}$ ), a traxectoria non pode facer bucles ou lazos.

A conservación do momento angular ten unha interpretación xeométrica sinxela. Se nos fixamos na figura vemos que a área sombreada, a que barre

o vector de posición nun tempo  $dt$  é:

$$dA = \frac{r \cdot r d\theta}{2} = r^2 \frac{d\theta}{2}$$

e, dividindo por  $dt$  obtemos que a área barrida por unidade de tempo, a *velocidade areolar* é:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt}$$

Esta cantidade é constante, xa que usando  $\mu r^2 \dot{\theta} = l$ ,

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\theta} = \frac{1}{2} \frac{l}{\mu} = \text{cte.}$$

Este resultado é o que comunmente se coñece como *segunda lei de Kepler*, e debemos destacar que é *válida para calquera forza central*, sexa ou non inversamente proporcional o cadrado da distancia. É outra maneira de enunciar a conservación do momento angular.

### 1.3. Conservación da enerxía e potencial efectivo

Continuamos a nosa análise do problema de forzas centrais observando que a lagrangiana non depende explicitamente do tempo, polo que a hamiltoniana é unha nova cantidade conservada:  $\frac{\partial L}{\partial t} = 0 \Rightarrow H = \text{cte}$ . No noso caso, dado que a forza é conservativa e ao non haber ligaduras móbiles, o valor desta hamiltoniana coincide co da enerxía total, que será polo tanto unha constante

$$H = E = \text{cte}$$

$$E = \frac{1}{2} \mu \left( \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 \right) + U(r).$$

Temos un sistema con dous graos de liberdade e unha coordenada cíclica ( $\theta$ ) que pode reducirse a un cun só grao de liberdade eliminando dita coordenada usando que  $\mu r^2 \dot{\theta} = l \Rightarrow \dot{\theta} = \frac{l}{\mu r^2}$

$$E = \frac{1}{2} \mu \dot{r}^2 + \frac{1}{2} \mu r^2 \dot{\theta}^2 + U(r) = \frac{1}{2} \mu \dot{r}^2 + \frac{1}{2} \mu r^2 \left( \frac{l}{\mu r^2} \right)^2 + U(r) = \frac{1}{2} \mu \dot{r}^2 + \frac{l^2}{2\mu r^2} + U(r),$$

que tamén se pode poñer como

$$E = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + V(r),$$

onde

$$V(r) = \frac{l^2}{2\mu r^2} + U(r).$$

As expresións anteriores equivalen á enerxía dunha partícula de masa  $\mu$  movéndose nunha dimensión con coordenada  $r$  baixo a acción do potencial  $V(r)$ . É o que chamamos o *problema unidimensional equivalente*. O *potencial efectivo*  $V(r)$  ten un termo que é o potencial central e outro que depende do momento angular. Calculamos a forza que deriva deste potencial ou *forza efectiva*:

$$F_{\text{ef}} = -\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{l^2}{\mu r^3} - \frac{\partial U}{\partial r} = \mu r \dot{\theta}^2 + F(r) = F_c(r) + F(r),$$

xa que  $F_c(r) = \mu r \dot{\theta}^2$  é a forza centrífuga, e por iso ao termo do potencial efectivo que depende de  $l$  chámasele *termo centrífugo*, o cal se anula cando non hai rotación en torno ao centro de forzas e o momento angular é nulo,  $l = 0$  (o movemento é na dirección radial).

#### 1.4. Clasificación de órbitas

Como xa sabemos, as solucións a este problema poderán clasificarse de acordo coa gráfica do potencial efectivo. Os puntos onde o valor da enerxía é igual que o do potencial  $V(r)$  son os *puntos de retorno*, xa que neles a enerxía cinética anúlase e a partícula equivalente está en repouso. A ecuación  $E = V(r)$  pode ter entón unha ou varias raíces ou puntos de retorno (ou ningunha). Isto permítenos falar de distintos tipos de órbitas:

- Se existen dúas raíces  $r_{\min}$  e  $r_{\max}$  de xeito que para  $r_{\min} < r < r_{\max}$ ,  $E > V(r)$ , entón temos unha *órbita confinada* nesa rexión anular (en Mecánica Cuántica falaríamos dun *estado ligado*, por exemplo un electrón do átomo de hidróxeno). Lembremos que sempre  $\dot{\theta} > 0$ , e ademáis, como nos puntos de retorno  $\dot{r} = 0$ , a órbita é sempre tanxente neles aos círculos  $r = r_{\min}$  e  $r = r_{\max}$ .
- Para certas combinacións dos valores de  $E, l$  para un potencial dado, a ecuación  $E = V(r)$  pode ter unha raíz dobre  $r_{\min} = r_{\max} = r = r_0$  e  $\dot{r} = 0$  en todo instante, é dicir, unha órbita circular. Isto debe corresponder a unha solución cun valor da enerxía igual a un extremo do potencial efectivo, concretamente un mínimo se é unha órbita circular estable. Da condición de mínimo:

$$\frac{\partial V}{\partial r}(r_0) = 0 \Rightarrow F_c(r_0) + F(r_0) = 0 \Rightarrow F_c(r_0) = -F(r_0)$$

o cal quere decir que a forza centrífuga equilibra exactamente a forza central.

- Se o movemento é periódico unha órbita confinada será ademais *pechada*: tras un número finito de viaxes entre  $r_{\min}$  e  $r_{\max}$ , a partícula terá feito un número tamén finito de rotacións respecto á coordenada  $\theta$  arredor da orixe e voltará ao mesmo punto coa mesma velocidade, repetíndose indefinidamente o movemento. No caso contrario, a órbita nunca se repetirá a si mesma e teremos unha órbita *aberta*.
- Se existe só un punto de retorno ou ningún, por exemplo porque a enerxía é moi grande, as órbitas serán *non acotadas* (i en Mecánica Cuántica falaríamos dun *estado de colisión*).

### 1.5. Integración do movemento polo método da enerxía

O noso problema quedou reducido a un cun só grao de liberdade: unha partícula nunha dimensión. Como temos unha constante do movemento (a enerxía), podemos separar variables na ecuación de conservación:

$$E = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + V(r) \Rightarrow \dot{r} = \frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{2}{\mu} [E - V(r)]}$$

e integrar entre  $t_0 = 0$  y  $t$ :

$$\int_0^t dt = t = \int_{r(0)}^r \frac{dr'}{\sqrt{\frac{2}{\mu} [E - V(r')]} = \int_{r(0)}^r \frac{dr'}{\sqrt{\frac{2}{\mu} [E - U(r') - \frac{l^2}{2\mu r'^2}]}}.$$

Para cada potencial concreto  $U(r)$ , esta integral dános  $t = t(r)$ , e, invertindo,  $r = r(t)$ . Unha vez coñecido  $r = r(t)$ , substituíríamos na ecuación  $l = \mu r^2 \dot{\theta}$  e, integrando de novo:

$$\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt} = \frac{l}{\mu r^2(t)} \Rightarrow \int_{\theta_0}^{\theta} d\theta = \theta - \theta_0 = \int_0^t \frac{l}{\mu r^2(t')} dt'.$$

Con isto teríamos explicitamente resolto o problema en forma paramétrica, obtendo  $r = r(t)$  e  $\theta = \theta(t)$ . Non obstante, vains interesarnos máis obter directamente a ecuación explícita da traxectoria ou órbita na forma  $r = r(\theta)$  (ou  $\theta = \theta(r)$ ). Para isto facemos o seguinte cambio de variable independente de  $t$  a  $\theta$ :

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta} \frac{dr}{d\theta} = \left( \frac{l}{\mu r^2} \right) \frac{dr}{d\theta},$$

co cal a integral que dá a solución para a órbita transfórmase en:

$$\theta(r) = \int \frac{\frac{l}{\mu r^2} dr}{\sqrt{\frac{2}{\mu} [E - U(r) - \frac{l^2}{2\mu r^2}]}}. \quad (2)$$

Nunha órbita acotada, o seu carácter aberto ou pechado depende da variación do ángulo  $\theta$  cando a traxectoria realiza media oscilación entre  $r_{\min}$  e  $r_{\max}$ :

$$\Delta\theta = \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \frac{\frac{l}{\mu r^2} dr}{\sqrt{\frac{2}{\mu} \left[ E - U(r) - \frac{l^2}{2\mu r^2} \right]}}$$

e a traxectoria será pechada só cando  $\Delta\theta$  sexa unha fracción racional de  $2\pi$ :

$$\Delta\theta = \frac{m}{n} 2\pi \Rightarrow n\Delta\theta = 2m\pi,$$

o cal quere dicir que despois de  $n$  viaxes de  $r_{\min}$  a  $r_{\max}$  a órbita terá completado un número enteiro de voltas e o movemento repetirase a si mesmo (lembramos que  $r_{\min}$  e  $r_{\max}$  son puntos de retorno onde é sempre  $\dot{r} = 0$ ).

## 1.6. Ecuación do movemento

Unha vez que utilizamos todas as simetrías e leis de conservación existentes no noso problema para reduci-lo a un cun só grao de liberdade, fomos quen de resolvelo polo método da enerxía. Porén, aínda non escribimos as ecuacións diferenciais de segunda orde do movemento. Fagámolo agora. Da lagrangiana da ec.(1), as ecuacións de Euler-Lagrange son:

$$\mu(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = -\frac{dU}{dr} = F(r)$$

e lembramos que  $\dot{\theta} = \frac{l}{\mu r^2}$  con  $l$  unha constante do movemento. De novo, para obtermos a ecuación explícita da órbita  $r = r(\theta)$ , facemos o cambio de variable independente:

$$\begin{aligned} \dot{r} &= \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \frac{dr}{d\theta} \dot{\theta} = \left( \frac{l}{\mu r^2} \right) \frac{dr}{d\theta} = -\frac{l}{\mu} \frac{d}{d\theta} \left( \frac{1}{r} \right) \\ \ddot{r} &= \frac{d\dot{r}}{dt} = \frac{d\dot{r}}{d\theta} \dot{\theta} = \frac{d}{d\theta} \left[ -\frac{l}{\mu} \frac{d}{d\theta} \left( \frac{1}{r} \right) \right] \dot{\theta} = -\frac{l^2}{\mu^2 r^2} \frac{d^2}{d\theta^2} \left( \frac{1}{r} \right), \end{aligned}$$

expresións que, substituídas na ecuación do movemento, nos levan á seguinte forma da mesma:

$$\frac{d^2}{d\theta^2} \left( \frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} = -\frac{\mu r^2}{l^2} F(r). \quad (3)$$

Esta é a chamada *ecuación de Binet*, que é válida para calquera forza central  $F(r)$ . As solucións desta ecuación son as mesmas que obtemos mediante o método da enerxía resolvendo a integral ec.(2). No caso especialmente simple en que  $F(r) \sim \frac{1}{r^2}$  o segundo membro da ecuación é constante e as solucións correspondentes, as órbitas do problema de Kepler, son doadas de obter. Outras veces a ecuación de Binet é útil para obter a forza central cando se coñece a órbita.

## 2. Forza inversamente proporcional ao cadrado da distancia. Movemento planetario

### 2.1. Problema de Kepler

Todo o que temos visto ata agora é xenérico para calquera potencial central. Como aplicación podemos considerar o exemplo en que a forza é a dada pola lei da gravitación universal, o chamado *problema de Kepler* do movemento dos planetas arredor do Sol:

$$F(r) = -\frac{Gm_1m_2}{r^2} = -\frac{k}{r^2},$$

ou sexa

$$U(r) = -\frac{k}{r},$$

con  $k = Gm_1m_2$ . O potencial efectivo é:

$$V(r) = -\frac{k}{r} + \frac{l^2}{2\mu r^2},$$

que está definido salvo unha constante aditiva que se fixa de xeito que  $V(r = \infty) = 0$ . Representemos graficamente este potencial para un valor fixo non nulo do momento angular  $l$ :

Podemos clasificar cualitativamente os distintos tipos de órbitas segundo o valor da enerxía  $E$ :

- Se  $E = E_1 \geq 0$ , o movemento non está acotado. Unha partícula que se move cara ao centro de forzas «choca» contra a barreira de potencial no punto de retorno  $r_1$  e non pode facer outra cousa que volver cara atrás, alonxándose indefinidamente.
- Se  $E = 0$ , estamos no caso anterior cando a partícula acada o infinito con velocidade asintoticamente nula.
- Se  $E = E_2 \leq 0$ , o movemento está acotado entre os puntos de retorno  $r_2$  e  $r_3$ .

- Se  $E = E_0$ , coincidindo co valor mínimo do potencial efectivo, entón  $r$  é constante  $r = r_0$  e temos unha órbita circular. O raio destas órbitas circulares é doado de calcular, xa que da condición de mínimo  $V'(r_0) = 0$  obtense:

$$r_0 = \frac{l^2}{\mu k} \equiv \alpha \quad (4)$$

## 2.2. Solución polo método da enerxía

Imos resolver a integral da ec.(2), onde poñemos  $U(r) = -\frac{k}{r}$ :

$$\theta(r) = \int \frac{\frac{l}{\mu r^2} dr}{\sqrt{\frac{2}{\mu} \left[ E + \frac{k}{r} - \frac{l^2}{2\mu r^2} \right]}}$$

e facemos o cambio de variable  $u = \frac{1}{r}$ :

$$\theta(u) = - \int \frac{du}{\sqrt{\frac{2\mu E}{l^2} + \frac{2\mu k}{l^2} u - u^2}}.$$

Tendo en conta que

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a + bx + cx^2}} = \frac{1}{\sqrt{-c}} \arccos \left( -\frac{b + 2cx}{\sqrt{q}} \right),$$

onde  $q = b^2 - 4ac > 0$  e  $a = \frac{2\mu E}{l^2}$ ,  $b = \frac{2\mu k}{l^2}$  e  $c = -1$ , temos que  $q = \left(\frac{2\epsilon}{\alpha}\right)^2$ , onde  $\alpha$  vén dado por ec.(4) e definimos:

$$\epsilon^2 = 1 + \frac{2El^2}{\mu k^2}. \quad (5)$$

Finalmente o resultado da integral é:

$$\theta(r) - \theta_0 = - \arccos \left( \frac{\frac{\alpha}{r} - 1}{\epsilon} \right),$$

onde  $\theta_0$  é a constante de integración. Invertindo este resultado obtemos a ecuación das órbitas:

$$r(\theta) = \frac{\alpha}{1 + \epsilon \cos(\theta - \theta_0)}.$$

Esta solución acada o seu valor mínimo  $r_{\min}$  cando  $\cos(\theta - \theta_0) = 1$ , ou sexa, cando  $\theta = \theta_0$ . Fixar a constante de integración  $\theta_0 = 0$  equivale entón a establecer que o  $r_{\min}$  sucede sobre o eixo  $X$ , e así o faremos no sucesivo:

$$r(\theta) = \frac{\alpha}{1 + \epsilon \cos \theta}. \quad (6)$$

A ecuación (6) é a dunha cónica en coordenadas polares con  $\epsilon$  a excentricidade. O valor mínimo da enerxía é tamén o mínimo do potencial efectivo, que corresponde a  $r = r_0$  dado por ec. (4):

$$E_{\min} = V(r_0) = -\frac{k}{r_0} + \frac{l^2}{2\mu r_0^2} = -\frac{\mu k^2}{2l^2},$$

polo que o valor mínimo de  $\epsilon$  é:

$$\epsilon_{\min}^2 = 1 + \frac{2l^2 \left(-\frac{\mu k^2}{2l^2}\right)}{\mu k^2} = 0,$$

que corresponde a unha circunferencia. Para  $E = 0$  temos  $\epsilon = 1$ , que corresponde a unha parábola, mentres que para os valores negativos da enerxía,  $0 < \epsilon < 1$ , e temos que as órbitas acotadas son elipses. Para valores positivos de  $E$ ,  $\epsilon > 1$  e as órbitas serán hiperbólicas. Resumindo:

- $E = E_{\min} = -\frac{\mu k^2}{2l^2} \Rightarrow \epsilon = 0$ , órbitas circulares.
- $-\frac{\mu k^2}{2l^2} < E < 0 \Rightarrow 0 < \epsilon < 1$ , órbitas elípticas.
- $E = 0 \Rightarrow \epsilon = 1$ , órbitas parabólicas.
- $E > 0 \Rightarrow \epsilon > 1$ , órbitas hiperbólicas.

### 2.3. Integración da ecuación do movemento

A ecuación de Binet (3) para o caso  $F(r) = -\frac{k}{r^2}$  convértese na ecuación lineal de segunda orde non homoxénea:

$$\frac{d^2}{d\theta^2} \left( \frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} = \frac{k\mu}{l^2}.$$

da cal a solución é:

$$\frac{1}{r} = \frac{k\mu}{l^2} + A \cos(\theta - \theta_0),$$

onde  $A$  e  $\theta_0$  son as constantes de integración. A solución pode escribirse igual que en (6):

$$r(\theta) = \frac{\alpha}{1 + \epsilon \cos(\theta - \theta_0)},$$

onde  $\alpha = \frac{l^2}{\mu k}$  e  $\epsilon = \frac{Al^2}{\mu k} = A\alpha$ . De novo, podemos fixar a constante  $\theta_0 = 0$ , o cal implica que o valor mínimo de  $r$  se acada para  $\theta = 0$ , é dicir, sobre o eixo  $X$ :

$$r_{\min} = r(0) = \frac{\alpha}{1 + \epsilon}.$$

A outra constante  $A$  (ou  $\epsilon$ ) pode relacionarse coa enerxía, evaluando esta en  $r = r_{\min}$  dado pola ecuación anterior:

$$E = \frac{l^2}{2\mu r_{\min}^2} - \frac{k}{r_{\min}} = \frac{l^2(1 + \epsilon)^2}{2\mu\alpha^2} - \frac{k(1 + \epsilon)}{\alpha} = \frac{k^2\mu}{2l^2}(\epsilon^2 - 1),$$

e, despxando  $\epsilon$  recuperamos outra vez a expresión (5).

## 2.4. Ecuacións cartesianas das órbitas

Nesta sección imos escribir as ecuacións das órbitas do problema de Kepler en coordenadas cartesianas para os distintos valores de  $\epsilon$ . Da ecuación en coordenadas polares (6), podemos escribir  $r = \alpha - \epsilon r \cos \theta$ , que en cartesianas é:

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \alpha - \epsilon x,$$

e que, elevando ao cadrado e reordenando, queda:

$$\frac{(1 - \epsilon^2)}{\alpha^2} x^2 + \frac{2\epsilon}{\alpha} x + \frac{y^2}{\alpha^2} = 1$$

Vexamos qué órbita representa esta ecuación para cada rango de valores de  $\epsilon$ :

- $\epsilon = 0$

Neste caso a ecuación redúcese a

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\alpha^2} = 1$$

que é unha órbita circular de radio  $\alpha$

- $\epsilon = 1$

$$\frac{2}{\alpha} x + \frac{y^2}{\alpha^2} = 1 \Rightarrow x = -\frac{y^2}{2\alpha} + \frac{\alpha}{2},$$

é unha parábola co vértice en  $(\frac{\alpha}{2}, 0)$ , que se abre cara a esquerda. Os puntos de corte co eixo  $Y$  son  $(0, \pm\alpha)$ .

- $\epsilon < 1$

Entón  $1 - \epsilon^2 > 0$  e podemos completar cadrados:

$$\frac{(1 - \epsilon^2)}{\alpha^2} x^2 + \frac{2\epsilon}{\alpha} x + \frac{y^2}{\alpha^2} = \left( \frac{\sqrt{1 - \epsilon^2}}{\alpha} x + \frac{\epsilon}{\sqrt{1 - \epsilon^2}} \right)^2 - \frac{\epsilon^2}{1 - \epsilon^2} + \frac{y^2}{\alpha^2} = 1,$$

ecuación que se pode arranxar para poñela como:

$$\left[ \frac{x + \frac{\epsilon\alpha}{1-\epsilon^2}}{\frac{\alpha}{1-\epsilon^2}} \right]^2 + \left[ \frac{y}{\frac{\alpha}{\sqrt{1-\epsilon^2}}} \right]^2 = 1.$$

Esta é a ecuación dunha elipse da forma

$$\frac{(x + \epsilon a)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

onde os semieixos maior e menor  $a$  e  $b$  veñen dados por:

$$a = \frac{\alpha}{1 - \epsilon^2} \quad b = \frac{\alpha}{\sqrt{1 - \epsilon^2}}. \quad (7)$$

Substituíndo nestas expresións  $\alpha$  e  $\epsilon$  como funcións da enerxía e o momento angular, ecs. (4) e (5) obtemos:

$$a = -\frac{k}{2E} \quad b = \frac{l}{\sqrt{-2\mu E}}. \quad (8)$$

O semieixo maior  $a$  depende só da enerxía, e é máis grande canto maior sexa esta ( $E < 0$ ). O semieixo menor depende tamén do momento angular, e para unha enerxía dada, aumenta con el. A elipse está centrada en  $(-a\epsilon, 0)$ , e ten un foco na orixe de coordenadas: a distancia focal é  $a\epsilon$ . A mínima distancia da elipse ao foco é por tanto  $a(1 - \epsilon)$  e sucede sobre o eixo X positivo de acordo coa nosa elección de constantes de integración. A distancia máxima é, polo tanto,  $a(1 + \epsilon)$ . Os puntos de corte co eixo Y son  $(0, \pm\alpha)$ .

- $\epsilon > 1$  Análogamente ao caso anterior, podemos completar cadrados, tendo agora que  $\epsilon^2 - 1 > 0$ :

$$\frac{(\epsilon^2 - 1)}{\alpha^2} x^2 - \frac{2\epsilon}{\alpha} x - \frac{y^2}{\alpha^2} = \left( \frac{\sqrt{\epsilon^2 - 1}}{\alpha} x - \frac{\epsilon}{\sqrt{\epsilon^2 - 1}} \right)^2 - \frac{\epsilon^2}{\epsilon^2 - 1} - \frac{y^2}{\alpha^2} = -1,$$

ecuación que se pode arranxar para poñela como:

$$\left[ \frac{x - \frac{\epsilon\alpha}{\epsilon^2 - 1}}{\frac{\alpha}{\epsilon^2 - 1}} \right]^2 - \left[ \frac{y}{\frac{\alpha}{\sqrt{\epsilon^2 - 1}}} \right]^2 = 1.$$

Esta é a ecuación dunha hipérbola da forma

$$\frac{(x - \epsilon a)^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

onde agora  $a$  e  $b$  veñen dados por:

$$a = \frac{\alpha}{\epsilon^2 - 1} \quad b = \frac{\alpha}{\sqrt{\epsilon^2 - 1}}, \quad (9)$$

ou en función de  $l$ ,  $E$ :

$$a = \frac{k}{2E} \quad b = \frac{l}{\sqrt{2\mu E}}. \quad (10)$$

Neste caso a hipérbola está centrada no punto  $(a\epsilon, 0)$ , tendo un dos focos na orixe de coordenadas: a distancia focal é  $a\epsilon$ . A hipérbola ten dúas ramas, con asíntotas de ecuación  $y = \pm \frac{b}{a}(x - a\epsilon)$ . Físicamente, unha das ramas corresponde á traxectoria dunha partícula atraída polo centro de forzas situado na orixe de coordenadas. A outra rama sería a dunha partícula sometida a unha forza repulsiva da mesma magnitude (con  $k < 0$ ). Os vértices destas ramas (puntos de retorno) están situados sobre o eixo  $X$  a distancias  $a(\epsilon \pm 1)$  respectivamente.

## 2.5. Leis de Kepler

No caso dos planetas que orbitan arredor do Sol, temos entón órbitas pechadas con  $E < 0$ , é dicir, elipses co Sol nun dos seus focos. Esta é a *primeira lei de Kepler*. Os semieixos veñen dados polas ecs. (7) e (8) e os ápsides (*perihelio* e *afelio*):

$$r_{\min} = \frac{\alpha}{1 + \epsilon} = a(1 - \epsilon) \quad (11)$$

$$r_{\max} = \frac{\alpha}{1 - \epsilon} = a(1 + \epsilon). \quad (12)$$

(No caso de tratarse de satélites que orbitan arredor da Terra estes ápsides denomínanse *perixeo* e *apoxeo*).

Lembremos que para calquera forza central e como consecuencia da conservación do momento angular, a velocidade areolar é unha constante do movemento:  $\frac{dA}{dt} = \frac{l}{2\mu}$  (*segunda lei de Kepler*). Isto vains permitir, ademais, calcular o período das órbitas, xa que da ecuación anterior temos  $dt = \frac{2\mu}{l}dA$  e integrando nun período:

$$T = \frac{2\mu}{l}A = \frac{2\mu}{l}\pi ab,$$

onde usamos que a área dunha elipse é  $A = \pi ab$ . Se elevamos ao cadrado a expresión anterior para o período e usando que  $b^2 = \frac{a^2}{1-\epsilon^2} = \alpha a$ :

$$T^2 = \frac{4\pi^2\mu^2}{l^2}\alpha a^3 = \frac{4\pi^2\mu^2}{l^2}\frac{l^2}{\mu k}a^3 = 4\pi^2\frac{\mu}{k}a^3 = \frac{4\pi^2}{G(m_1 + m_2)}a^3.$$

Este é o resultado analítico exacto. En realidade a *terceira lei de Kepler* afirmaba que o cadrado do período é proporcional ao cubo do semieixo maior da elipse, coa constante de proporcionalidade igual para todos os planetas. Isto é só aproximadamente certo, xa que se  $m_1 = m_{\text{Sol}}$  e  $m_2 = m_{\text{Planeta}}$ , temos que para  $m_{\text{Sol}} \gg m_{\text{Planeta}}$ :

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{Gm_{\text{Sol}}}a^3.$$

No caso do planeta máis grande, Xúpiter,  $\frac{m_{\text{Planeta}}}{m_{\text{Sol}}} \approx \frac{1}{1000}$  e a corrección é relativamente importante.

Hai que ter en conta que Kepler (1571-1630) publicou as súas leis primeira e segunda en *Astronomia Nova* (1609) e a terceira en *Harmonicis Mundi* (1619), en todo caso uns 80 anos antes das leis de Newton (1643-1727), que se publicaron en 1687. De feito as leis de Kepler son leis experimentais deducidas a partir das observacións de Tycho Brahe (1546-1601), que morreu antes de que Galileo (1564-1642) construíse o primeiro telescopio en 1609. Históricamente foi Newton o que coñecendo as leis de Kepler utilizounas para deducir a súa lei da Gravitación Universal, e non ao revés como o vimos de presentar nestas notas.

## 2.6. Lei da Gravitación Universal a partir das leis de Kepler

Da segunda lei de Kepler de constancia da velocidade areolar temos que

$$\frac{dA}{dt} = \frac{r^2\dot{\theta}}{2} = \text{cte},$$

e, polo tanto:

$$\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) = 0 = r[r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}].$$

O termo entre corchetes non é mais que a compoñente angular da aceleración en coordenadas polares,  $a_\theta = 0$ , polo que a aceleración só ten compoñente radial e a forza é central,  $f = f(r)$ .

Da primeira lei sabemos que as órbitas son elípticas con ecuación dada por ec. (6). Basta substituír dita ecuación da órbita na ecuación de Binet (3) para obter que

$$f(r) = -\frac{k}{r^2},$$

a forza é inversamente proporcional ao cadrado da distancia.

O resultado que obtivo Kepler na súa terceira lei,

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{Gm_{\text{Sol}}} a^3,$$

mentres que para a partícula que se move nunha elipse, o resultado que obtivemos xeometricamente era:

$$T^2 = 4\pi^2 \frac{\mu}{k} a^3.$$

Comparando ambas expresións, despexamos  $k = Gm_{\text{Sol}}m_{\text{Planeta}}$  e:

$$f(r) = \frac{-Gm_{\text{Sol}}m_{\text{Planeta}}}{r^2} = \frac{-Gm_1m_2}{r^2}$$

## 2.7. Estabilidade das órbitas circulares

Os planetas describen órbitas elípticas, pero en xeral moi pouco excéntricas, é dicir, case circulares. Estas órbitas son, evidentemente, estables baixo pequenas perturbacións. Isto é característico da forza newtoniana, pero non necesariamente certo para outras forzas centrais. Vexamos baixo que condicións existen órbitas circulares estables.

Para que existan órbitas circulares de radio  $r_0$ , o potencial efectivo  $V(r) = U(r) + \frac{l^2}{2\mu r^2}$  ha de ter un mínimo en  $r = r_0$ :

$$\frac{dV}{dr}(r_0) = \frac{dU}{dr}(r_0) - \frac{l^2}{\mu r_0^3} = 0 \Rightarrow \frac{dU}{dr}(r_0) = -f(r_0) = \frac{l^2}{\mu r_0^3}. \quad (13)$$

E ademais:

$$\frac{d^2V}{dr^2}(r_0) = \frac{d^2U}{dr^2}(r_0) + \frac{3l^2}{\mu r_0^4} > 0 \Rightarrow f'(r_0) + \frac{3}{r_0}f(r_0) < 0,$$

é dicir, a frecuencia angular das pequenas oscilacións na dirección radial ten que satisfacer:

$$\omega_0^2 = \frac{1}{\mu}V''(r_0) = -\frac{1}{\mu} \left[ f'(r_0) + \frac{3}{r_0}f(r_0) \right] > 0. \quad (14)$$

Consideremos potenciais tales que dan lugar a forzas da forma:

$$f(r) = -\frac{k}{r^n}.$$

Neste caso  $\omega_0^2 = -\frac{1}{\mu}k(n-3)r_0^{-n-1}$  e as condicións (13), (14) restrinxen os casos en que as órbitas circulares existen a

$$n < 3.$$

Podemos calcular a velocidade angular das órbitas circulares de radio  $r_0$ . Como  $l = \mu\omega r_0^2$ :

$$-f(r_0) = \frac{k}{r_0^3} = \frac{l^2}{\mu r_0^3} = \frac{(\mu\omega r_0^2)^2}{\mu r_0^3}$$

temos que

$$\omega^2 = \frac{k}{\mu} r_0^{-n-1},$$

e, comparando coa frecuencia das oscilacións pequenas:

$$\frac{\omega_0^2}{\omega^2} = 3 - n \Rightarrow \frac{\omega_0}{\omega} = \sqrt{3 - n}.$$

A órbita será pechada se o cociente  $\frac{\omega_0}{\omega}$  é un número racional, o cal sucede só no caso en que  $3 - n$  sexa un cadrado perfecto  $3 - n = m^2$ . Nese caso a órbita realizará  $m$  oscilacións radiais completas mentras dá unha volta a redor do centro de forzas e acaba pechándose. Se chamamos  $\beta$  ao ángulo entre dous ápsides (perihelios), este é  $\beta = \omega T$ , onde  $T$  é o periodo das oscilacións radiais,  $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$ , ou sexa:

$$\beta = 2\pi \frac{\omega}{\omega_0}$$

Como ademais  $n < 3$ , os potenciais que admiten perturbacións estables e pechadas das órbitas circulares son:  $n = 2$  ( $\beta = 2\pi$ ) (Kepler),  $n = -1$  ( $\beta = \pi$ ) (oscilador harmónico),  $n = -6$  ( $\beta = \frac{2\pi}{3}$ ),  $n = -13$  ( $\beta = \frac{\pi}{2}$ ), etc.

No caso contrario, a órbita será acotada, pero aberta. Calquera desviación da lei de Newton dará lugar a este fenómeno (*precesión dos perihelios*). Newton sabíao e propuxo a súa medida como comprobación da súa lei da gravitación. Einstein tamén propuxo a medida da precesión dos perihelios dos planetas como test das súas predicións ao aplicar as leis relativistas.

## 2.8. Algunhas aplicacións

### 2.8.1. Satélites en órbita

Para determinar a órbita dun satélite necesitamos dous parámetros dos que poidamos extraer as constantes do movemento  $E$  e  $l$ . En particular, as

condicións  $(r_{\min}, v_0)$  no seu punto máis cercano (perixeo) serán suficientes. Dado que  $r_{\min} = \frac{\alpha}{1+\epsilon}$ ,  $\alpha = \frac{l^2}{\mu k}$  e  $l = r_{\min} \mu v_0$ :

$$\epsilon = \frac{\alpha}{r_{\min}} - 1 = \frac{\mu}{k} r_{\min} v_0^2 - 1$$

Para  $\mu \approx m_1 = m_{\text{sat}}$  e  $m_2 = M_{\text{Terra}}$  temos que  $\frac{\mu}{k} \approx \frac{1}{GM_T}$ . Esta combinación aparece repetidamente neste tipo de aplicacións. A miúdo utilizaremos que, dado que calquera masa sobre superficie da Terra ten un peso  $mg = \frac{GM_T m}{R_T^2}$ , entón  $GM_T = gR_T^2$ , expresión útil dado que habitualmente lembramos mellor os valores numéricos do radio da Terra e a aceleración da gravidade ( $R_T \approx 6400$  km,  $g = 9,8$  m/s,  $GM_T \approx 9,8 (6400 \times 10^3)^2 \approx 40 \times 10^{13}$  m<sup>3</sup>/s<sup>2</sup>).

Para  $\epsilon = 0$  temos unha órbita circular de raio  $r = r_{\min}$  e velocidade constante  $v_c^2 = \frac{k}{\mu r_{\min}}$  polo que a excentricidade pódese escribir:

$$\epsilon = \left( \frac{v_0}{v_c} \right)^2 - 1$$

e a ecuación da órbita será:

$$r = r_{\min} \frac{\left( \frac{v_0}{v_c} \right)^2}{1 + \left[ \left( \frac{v_0}{v_c} \right)^2 - 1 \right] \cos \theta}.$$

Na práctica, este sería o procedemento para enviar un satélite a unha órbita elíptica desexada, partindo dunha órbita circular de raio  $r = r_{\min}$  e encendendo os motores para aumentar a velocidade de xeito instantáneo e na dirección do movemento (perpendicular a  $r$ ) ata  $v = v_0$ . Analogamente poderase obter a órbita cun par distinto de datos iniciais como a distancia e velocidade no apoxeo  $(r_{\max}, v'_0)$ , os dous ápsides  $(r_{\min}, r_{\max})$ , etc.

A velocidade nun punto calquera dunha órbita elíptica pode obterse en función da distancia do feito de que a enerxía é constante e a súa relación co semieixo maior:

$$E = \frac{1}{2} m v^2 - \frac{k}{r} = -\frac{k}{2a},$$

de onde:

$$v^2 = 2GM_T \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{2a} \right) = 2gR_T^2 \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{2a} \right)$$

### 2.8.2. Velocidade de escape

Chamamos *velocidade de escape* á velocidade necesaria para que un satélite acade o infinito con  $v = 0$  dende a superficie da Terra, é dicir, a velocidade necesaria para incrementar a súa enerxía total ata un valor nulo e poder entrar nunha órbita non acotada. Despexando a velocidade da

ecuación  $E = 0$ , obtense doadamente:

$$v_e = \sqrt{\frac{2GM_T}{R_T}} = \sqrt{2gR_T} \approx 11 \text{ km/s}$$

Podemos considerar tamén aquela velocidade necesaria para que un obxecto poida escapar da atracción do sol, abandonar o sistema solar e chegar ao infinito partindo dunha distancia igual ao raio da órbita terrestre. Neste caso falamos de *velocidade de escape do sistema solar* e se pode calcular se na ecuación anterior substituímos  $M_T$  por  $M_{\text{Sol}}$  e o raio da terra polo da órbita terrestre. O resultado é:

$$v_{\text{ess}} = \sqrt{\frac{2GM_{\text{Sol}}}{R_{\text{orb}}}} \approx 42 \text{ km/s.}$$

### 2.8.3. Satélites xeostacionarios

Para algunhas aplicacións convén ter en órbita satélites que permanezan inmóviles con respecto a un punto da Terra, por exemplo no caso dos satélites de televisión. É o que se chama un *satélite xeostacionario*. Dado que calquera punto sobre a superficie da Terra ten compoñentes radial e polar da velocidade nulas, os satélites xeostacionarios deben ter tamén  $v_r = v_\theta = 0$  e a mesma velocidade angular  $\omega$ . A órbita será entón perpendicular ao eixo da Terra. Como ademais o plano da órbita contén ao centro de forzas, neste caso o centro da Terra, este plano ten que ser o plano ecuatorial.

A condición de equilibrio entre os termos central e centrífugo da forza é:

$$\frac{GMm}{(R_T + h)^2} = m\omega^2(R_T + h),$$

onde  $M$  é a masa da Terra,  $R_T$  o seu radio e  $\omega$  a velocidade angular de rotación (unha volta cada día). Introducindo nesta expresión os datos numéricos, podemos despxear a altura sobre a superficie da Terra,  $h$ , á que deben situarse os satélites xeostacionarios:

$$h \approx 36000 \text{ km.}$$

### 2.8.4. Misiões a outros planetas

Supoñamos que queremos enviar unha nave a outro planeta dende a Terra. Para que unha nave poida chegar aos confíns do sistema solar deberá proporcionárselle unha velocidade próxima á velocidade de escape do sistema solar  $v_{\text{ess}} \approx 42 \text{ km/s}$ . Se o lanzamento se fai na dirección da velocidade orbital da Terra arredor do Sol, a velocidade de lanzamento pode reducirse moito, xa que a velocidade orbital da Terra na súa órbita case circular de radio  $R$  ( $R = 1 \text{ UA}$ ) e período  $T$  ( $T = 1 \text{ ano}$ ) é  $V_T = \frac{2\pi R}{T} \approx 30 \text{ km/s}$ , co cal, cunha velocidade de  $42 - 30 = 12 \text{ km/s}$ , a nave escaparía

do sistema solar. Para enviala a calquera planeta do mesmo, a velocidade sería menor, tendo en conta que, en calquera caso, necesítase a velocidade de escape da Terra.

O método para a misión interplanetaria é colocar a nave nunha órbita elíptica con perihelio na órbita da Terra e afelio na órbita do planeta. A nave debe lanzarse no momento axeitado para que nave e planeta cheguen ao mesmo tempo ao punto de encontro. É necesario calcular os datos da órbita elíptica e o tempo de voo.

### 3. Colisións. Seccións eficaces

Os experimentos de colisións, dispersión ou *scattering* son unha das ferramentas fundamentais na investigación da estrutura dos obxectos atómicos ou subatómicos. O experimento máis famoso seica é o de Rutherford, que lanzou partículas  $\alpha$  contra átomos de ouro e descubriu que a maioría da masa do átomo está concentrada nun núcleo no seu centro. Tamén hai situacións de colisións a nivel macroscópico (bolas de billar, cometas, etc.), aínda que a principal aplicación é a teoría cuántica de colisións. Os conceptos principais introducíremolos aquí a nivel clásico. A maior complicación é que cuánticamente non se pode seguir a traxectoria individual de cada *proyectil*, que choca contra un *albo*. O que se fai é mandar moitos proxectís, que son dispersados en diferente direccións, e facer un estudo estatístico. Isto leva ao concepto de *sección eficaz de colisión*.

#### 3.1. Parámetro de impacto e ángulo de dispersión

Xeralmente consideramos partículas ou proxectís lanzados contra albos en repouso. Inicialmente o proxectil atópase moi lonxe do albo e o consideramos unha partícula libre, polo que só terá enerxía cinética. Cando se achega ao albo, experimentará a interacción do mesmo e voltará a alonxarse, volvendo a ser asintoticamente libre. Exemplos que consideraremos son o choque contra unha esfera ríxida, a órbita aberta dun cometa ao entrar no sistema solar e interaccionar co campo gravitatorio do Sol ou a repulsión electrostática entre partículas cargadas no experimento de Rutherford. Convén definir os seguintes conceptos:

- *Ángulo de dispersión ou scattering,  $\theta$* : É o ángulo que forman as direccións entrante e saínte, as liñas rectas da traxectoria do proxectil moito antes e moito despois da colisión.  $\theta = 0$  é equivalente á ausencia de colisión.  $\theta = \pi$  é o valor máximo de dito ángulo (rebote cara atrás).
- *Parámetro de impacto,  $b$* : É a distancia perpendicular entre a dirección de incidencia e o albo, é dicir, a distancia á que pasaría o proxectil de non haber interacción. Dalgún xeito, o parámetro de impacto mide a

«puntería» do lanzamento. Se  $b = 0$ , a puntería é perfecta e o proxectil vai dirixido directamente contra o albo. A miúdo isto implica que  $\theta = \pi$

En xeral, a cada  $b$  corresponderalle un  $\theta$  distinto. O principal cálculo teórico que poderemos facer é precisamente a obtención da relación entre estas variables:  $\theta = \theta(b)$ . Nos experimentos de física (sub)atómica, o carácter de  $b$  e  $\theta$  é moi distinto:  $\theta$  mídese doadamente (fotos de cámaras de néboa ou burbullas, detectores), pero  $b$  nunca se pode medir directamente. Por iso é necesario definir a sección eficaz.

### 3.2. Sección eficaz de colisión

Se coñecésemos  $\theta = \theta(b)$  ou  $b = b(\theta)$  saberíamos todo sobre a interacción, pero como non podemos medir o parámetro de impacto o que facemos é observar moitas colisións entre proxectís e albos similares (por exemplo, enviando feixes de proxectís contra moitos átomos nun sólido ou un gas).

Consideremos por un intre un só proxectil lanzado contra un conxunto de esferas ríxidas. Sexa  $n_b$  o número de albos por unidade de superficie, vista dende a dirección incidente. Se  $A$  é a área total do conxunto de albos, entón o número deles é  $n_b A$ . Sexa agora  $\sigma$  a área ou sección de cada albo vista dende a dirección de incidencia ( $\pi r^2$  no caso das esferas). A área total dos albos é  $n_b A \sigma$ . A probabilidade de que un proxectil impacte contra algún albo será:

$$\text{Probabilidade dun choque} = \frac{\text{Área dos albos}}{\text{Área total}} = \frac{n_b A \sigma}{A} = n_b \sigma$$

Se enviamos un feixe con moitos proxectís incidentes  $N_{\text{inc}}$ , o número deles que chocan ou son dispersados  $N_{\text{sc}}$  será:

$$N_{\text{sc}} = N_{\text{inc}} n_b \sigma$$

Esta é a relación fundamental da teoría de colisións. Como  $N_{\text{inc}}$ ,  $N_{\text{sc}}$  e  $n_b$  se poden medir, esta relación danos o *tamaño* ou *sección eficaz* dos albos, é dicir, a *área efectiva do albo para interaccionar co proxectil*. Normalmente a situación é máis complexa que no caso de partículas puntuais que chocan contra esferas ríxidas. A sección eficaz contén información sobre os proxectís, sobre os albos e sobre a interacción.

Consideremos esferas ríxidas de raio  $R_1$  que interaccionan por contacto con albos que á súa vez son tamén esferas ríxidas de raio  $R_2$ . É claro que para que exista un choque, o parámetro de impacto debe ser  $b < R_1 + R_2$ , ou sexa, o centro do proxectil debe estar dentro dun círculo de raio  $R_1 + R_2$  perpendicular á dirección de incidencia, e polo tanto a sección eficaz será  $\sigma = \pi(R_1 + R_2)^2$ . Vemos así que a sección eficaz depende do tipo de albo, pero tamén do tipo de proxectil.

Para argumentar que  $\sigma$  tamén depende da interacción consideremos o seguinte exemplo: supoñamos que lanzamos dardos contra unha diana circular. A sección eficaz será simplemente a da diana,  $\pi R^2$ . Imaxinemos que a diana está trucada e *atrae* aos dardos. Está claro entón que cun parámetro de impacto maior (menor puntería) será suficiente para acertar na diana. Esta parece máis grande do que é en realidade: a sección eficaz é maior que a área da diana. Se a diana o que fai é *repeler* os dardos, a situación é a contraria: aínda con boa puntería no lanzamento (parámetro de impacto pequeno) será difícil acertar co dardo na diana, que aparenta ser máis pequena (sección eficaz menor que a súa área real).

En experimentos reais, poden suceder máis cousas que o simple choque por contacto ou dispersión das partículas debido á interacción. Por exemplo, cando lanzamos feixes de electróns contra átomos, estes poden desviar o electrón (dispersión), pero tamén poden capturalo, ionizarse e perder algún outro electrón, etc, polo que en xeral falaremos de distintos tipos de seccións eficaces. A este nivel fálase xeralmente de *colisións elásticas* no primeiro dos casos e de *colisións inelásticas* cando hai cambios no albo (se ioniza, fusiona, etc.).

Para rematar esta sección mencionaremos que nos experimentos a nivel atómico, como a sección eficaz ten dimensións de área e o tamaño do núcleo atómico é de  $10^{-14}$  m, úsase como unidade para medir seccións eficaces o *barn*:

$$1 \text{ barn} = (10^{-14} \text{ m})^2 = 10^{-28} \text{ m}^2.$$

### 3.3. Sección eficaz diferencial

Na definición de  $\sigma$  da sección anterior contamos o número total de partículas que interaccionan, independentemente da dirección na que son dispersadas. Para ter isto en conta definiremos a *sección eficaz diferencial*. Parametrizamos a dirección de dispersión dando os ángulos polares  $\phi$  e  $\theta$  respecto á orixe situada no albo. Como non ten sentido falar do número de partículas que se dispersan exactamente nesa dirección, falamos do número de partículas que se dispersan en direccións contidas nun cono estreito ou elemento de *ángulo sólido* centrado en  $(\phi, \theta)$ .

O elemento de ángulo sólido en coordenadas esféricas é:

$$d\Omega = \sin \theta d\theta d\phi$$

de xeito que a esfera completa subtende un ángulo sólido igual a  $4\pi$ , pois:

$$\Omega = \int_{\Omega} d\Omega = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \sin \theta d\theta d\phi = 4\pi$$

Usamos a ecuación fundamental neste o caso para o número de partículas dispersadas nun elemento de ángulo sólido  $d\Omega$ :

$$dN_{sc}(\text{en } d\Omega) = N_{inc} n_b d\sigma(\text{en } d\Omega)$$

Como  $d\sigma$  é proporcional a  $d\Omega$  escribimos

$$d\sigma(\phi, \theta) = \frac{d\sigma}{d\Omega}(\phi, \theta)d\Omega,$$

e precisamente o factor

$$\sigma(\phi, \theta) = \frac{d\sigma}{d\Omega}(\phi, \theta)$$

é o que chamamos *sección eficaz diferencial*.

Temos entón

$$dN_{\text{sc}}(\text{en } d\Omega) = N_{\text{inc}}n_b \frac{d\sigma}{d\Omega}(\phi, \theta)d\Omega.$$

Se integramos  $dN_{\text{sc}}(\text{en } d\Omega)$  a todos os ángulos, recuperamos o número total de partículas dispersadas  $N_{\text{sc}}$ :

$$N_{\text{sc}} = \int dN_{\text{sc}} = N_{\text{inc}}n_b \int \frac{d\sigma}{d\Omega}(\phi, \theta)d\Omega = N_{\text{inc}}n_b\sigma$$

onde

$$\sigma = \int \frac{d\sigma}{d\Omega}(\phi, \theta)d\Omega$$

e a sección eficaz total.

Para o cálculo da sección eficaz diferencial, supoñamos que o problema é axialmente simétrico e que, polo tanto, non temos dependencia en  $\phi$ . Sexa un proxectil incidindo con parámetro de impacto  $b$ . Calculando a traxectoria, poderemos atopar o ángulo de scattering  $\theta = \theta(b)$  e, resolvendo,  $b = b(\theta)$ . De acordo coa figura, o número  $dN_{\text{sc}}(\text{en } d\Omega)$  de partículas dispersadas nun ángulo sólido  $d\Omega$  centrado nun ángulo  $\theta$  son aquelas que pasan polo anel circular correspondente a un parámetro de impacto comprendido entre  $b$  e  $b + db$ , é dicir, aquelas que inciden sobre unha área

$$d\sigma = 2\pi b db$$

e que emerxen cun ángulo entre  $\theta$  e  $\theta + d\theta$  nun ángulo sólido

$$d\Omega = 2\pi \sin \theta d\theta.$$

A sección eficaz diferencial será daquela:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{2\pi b db}{2\pi \sin \theta d\theta} = \frac{b}{\sin \theta} \left| \frac{db}{d\theta} \right|,$$

onde o valor absoluto introdúcese para que  $\frac{d\sigma}{d\Omega}$  sexa positiva, dado que a miúdo  $\theta$  diminúe con  $b$  e  $\frac{db}{d\theta}$  é negativo. O cálculo teórico require a ecuación da traxectoria para obter a derivada que nos dá a sección eficaz.

### 3.3.1. Exemplo: scattering de partículas puntuais contra esferas ríxidas

Usaremos a lei de que as partículas se dispersan un ángulo igual ao de incidencia sobre a superficie da esfera, como se amosa na figura. A relación entre o parámetro de impacto e o ángulo de dispersión obtense doadamente xa que  $b = R \sin \varphi$ , pero como  $2\varphi + \theta = \pi$ ,  $\varphi = \frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}$  polo que  $b = R \sin(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}) = R \cos \frac{\theta}{2}$  e entón:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{b}{\sin \theta} \left| \frac{db}{d\theta} \right| = \frac{R^2}{4}.$$

A sección eficaz é isotrópica neste exemplo, o número de partículas desviadas nun ángulo sólido é igual para todas as direccións. Integrando a sección eficaz diferencial sobre todos os ángulos sólidos temos que

$$\sigma = \int \frac{d\sigma}{d\Omega} = \int \frac{R^2}{4} d\Omega = \frac{R^2}{4} 4\pi = \pi R^2,$$

como era de agardar ao tratarse de esferas ríxidas.

### 3.4. Dispersión de Rutherford

Imos considerar a dispersión de partículas lixeiras de masa  $m$  e carga  $Ze$  (partículas  $\alpha$ ,  $Z = 2$ ,  $m = 4$ , núcleos de He) contra blancos pesados de carga  $Z'e$  (núcleos de ouro,  $Z' = 79$ ). As partículas incidentes teñen unha enerxía coñecida  $E$ , que ven dada pola súa enerxía cinética cando están suficientemente lonxe do alvo e se propagan con velocidade  $v$ . O potencial é:

$$U(r) = K \frac{ZZ'e^2}{r} = \frac{\beta}{r},$$

con  $K$  unha constante que depende das unidades e  $\beta = KZZ'e^2 > 0$ . Neste caso, a forza é repulsiva e o potencial sempre positivo, polo que a enerxía total é tamén sempre positiva e todas as órbitas son necesariamente hiperbólicas, vindo dadas por:

$$r = \frac{\alpha}{-1 + \epsilon \cos \theta},$$

como corresponde á rama repulsiva das hipérbolas que estudamos en seccións anteriores. Chamemos momentaneamente  $B$  ao parámetro de impacto para

evitar confusión co parámetro  $b$  na ecuación cartesiana da órbita. Pretendemos obter  $B = B(\theta)$  para deducir unha expresión teórica da sección eficaz. Porén, tendo en conta que o momento angular  $l$  das partículas incidentes pode expresarse en función do parámetro de impacto  $B$  como  $l = mvB$  e que a enerxía das mesmas é  $E = \frac{1}{2}mv^2$ , temos:

$$b = \frac{l}{\sqrt{2mE}} = \frac{mvB}{\sqrt{2m(\frac{1}{2}mv^2)}} = B$$

resultando que  $b = B$ .

Da figura é claro que  $\phi + \theta = \pi$ , onde  $\theta$  é o ángulo de dispersión no caso repulsivo, mentres que  $\phi$  sería o correspondente ángulo de dispersión se miramos a rama atractiva da hipérbola. Temos entón a relación:

$$\frac{\phi}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}.$$

Por outra banda, a pendente da asíntota é:

$$\tan \frac{\phi}{2} = \frac{b}{a} \Rightarrow b = a \tan \frac{\phi}{2} = a \cot \frac{\theta}{2} = \frac{\beta}{2E} \cot \frac{\theta}{2},$$

onde tivemos en conta a expresión de  $a$  en función da enerxía. De aquí tamén podemos obter a excentricidade como función do ángulo de dispersión se temos en conta que  $b = a\sqrt{\epsilon^2 - 1}$ , resultando:

$$\epsilon = \sqrt{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2} = \frac{1}{\sin \frac{\theta}{2}}.$$

Unha vez obtido o parámetro de impacto como función do ángulo de dispersión podemos obter a sección eficaz diferencial:

$$\sigma(\theta) = \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{b}{\sin \theta} \left| \frac{db}{d\theta} \right| = \frac{\beta^2}{16E^2 \sin^4 \frac{\theta}{2}},$$

ou sexa:

$$\sigma(\theta) = \frac{d\sigma}{d\Omega} = \left( \frac{\beta}{4E} \right)^2 \frac{1}{\sin^4 \frac{\theta}{2}},$$

con  $\beta = KZZ'e^2$ , que é a fórmula de Rutherford.

Nesta expresión observamos que a sección eficaz é importante para ángulos pequenos, diminuindo rapidamente para ángulos grandes. No experimento de Rutherford se tiña  $E = 6,5$  MeV, cun fluxo de partículas  $\alpha$  de  $N_{\text{inc}} = 6 \times 10^8$  lanzadas contra unha lamia de ouro de  $1 \mu\text{m}$  de espesor. A área da pantalla era de  $1 \text{ mm}^2$  a unha distancia de  $1 \text{ cm}$  do albo, subtendendo un ángulo sólido de  $0,01 \text{ sr}$ . As medicións da sección eficaz daban, por exemplo  $\sigma(\theta = 15^\circ) = 2,1 \times 10^5 \frac{\text{barns}}{\text{sr}}$ , mentres que  $\sigma(\theta = 150^\circ) = 0,88 \frac{\text{barns}}{\text{sr}}$ , varias ordes de magnitude inferior.

A distancia mínima á que as partículas incidentes poden achegarse ao centro de forzas é:

$$r_{\text{mín}} = a(1 + \epsilon) = \frac{\beta}{2E} \left(1 + \frac{1}{\sin \frac{\theta}{2}}\right).$$

Algunhas partículas «rebotan» cara atrás, para as cales o  $r_{\text{mín}}$  é simplemente proporcional ao inverso da enerxía:

$$r_{\text{mín}} = \frac{\beta}{2E}.$$

Todo o cálculo anterior é válido só para rangos de enerxía tales que o  $r_{\text{mín}}$  sexa maior que o raio da distribución de carga positiva do núcleo albo, estimado da mesma orde que o tamaño do átomo ( $10^{-8}$  m aproximadamente), é dicir ata enerxías da orde de  $E \approx \beta \times 10^8$ , dado que no interior dunha distribución de carga uniforme, o campo eléctrico pasaría a ser linear en lugar de coulombiano e a sección eficaz tería unha forma diferente. Sen embargo, as medidas experimentais concordaban co cálculo teórico moito máis alá do esperado, ata enerxías moi superiores  $E \approx \beta \times 10^{12}$ , indicando que a carga positiva do núcleo dos átomos de ouro estaba concentrada nun raio moito máis pequeno do que se pensaba. Isto levou a formular o modelo do átomo tal como o coñeceríamos máis tarde.